

# БИФУРКАЦИИ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

А.Г. Кузьмин

Численно исследовано трансзвуковое обтекание аэродинамического профиля с малой кривизной в средней части. Установлено ветвление стационарных решений уравнений Эйлера, обусловленное неустойчивостью течения при определенных углах атаки  $\alpha$  и числах Маха натекающего потока  $M_\infty$ . Изучена зависимость коэффициента подъемной силы от параметров  $M_\infty$  и  $\alpha$ . Получены бифуркационные кривые на плоскости  $(M_\infty, \alpha)$ .

**Введение.** В работах [1-3] была исследована устойчивость трансзвукового течения в канале с параллельными стенками и небольшим выступом, расположенным на нижней стенке. Выявлена неустойчивость невязких стационарных течений, содержащих сверхзвуковые зоны, близко расположенные друг к другу, или сверхзвуковую зону с внутренними косыми скачками уплотнения. Было показано, что в этих случаях малые изменения числа Маха, заданного на выходе из канала, могут приводить к резкому изменению структуры течения в результате слияния или расщепления сверхзвуковых зон.

Концепция структурной неустойчивости способствовала пониманию причин неединственности трансзвукового обтекания, которая была установлена в исследованиях ряда авторов в 1990-е годы [4]. Эти причины были подробно проанализированы в [4-6] для семейства симметричных профилей  $y(x) = \pm 0.06 [1 - (2x - 1)^4]^{1/2} (1 - x^m)^2$ ,  $8 \leq m \leq 12$ , при нулевых и малых углах атаки. Для несимметричных профилей Whitcomb и DSMA532 неустойчивость обтекания получена на режимах с отрицательными углами атаки [7].

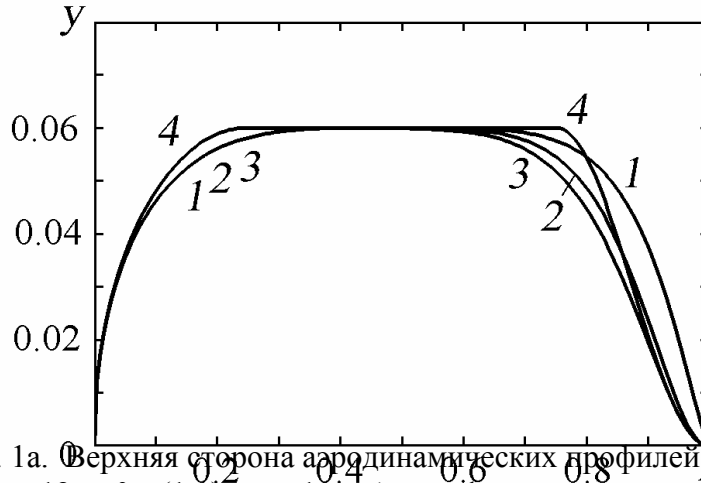
В данной работе продолжено исследование бифуркационных явлений для профиля с  $m=16$  из указанного выше семейства. Для невязкого стационарного обтекания изучена зависимость коэффициента подъемной силы от  $\alpha$  и  $M_\infty$  в диапазонах  $-1^\circ < \alpha < 1^\circ$ ,  $0.795 < M_\infty < 0.85$ . Проведен анализ устойчивости симметричных и несимметричных течений около этого профиля. Представлен пример автоколебательного обтекания симметричного профиля вязким потоком при нулевом угле атаки.

**1. Постановка задачи и численный метод.** Рассматривается двумерное обтекание потоком воздуха симметричного профиля

$$y(x) = \pm 0.06 \sqrt{1 - (2x - 1)^4} (1 - x^m)^2, \quad m = 16, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

верхняя часть которого показана на фиг. 1а. Для сравнения на фиг. 1а представлены также профили с  $m=10, 12$ , изученные в [4], и профиль с прямолинейной средней частью, предложенный в [8].

Невязкое течение описывается системой уравнений Эйлера, решение которой требуется найти в области с внешней границей, расположенной на достаточно большом расстоянии от профиля. Условия на входной и выходной частях внешней границы определяются заданным углом атаки  $\alpha$  и числом Маха на бесконечности  $M_\infty < 1$  [9]. На профиле задается условие скольжения. Начальными условиями являются параметры однородного потока (в который мгновенно вносится профиль) или неоднородное поле течения, полученное в результате расчета

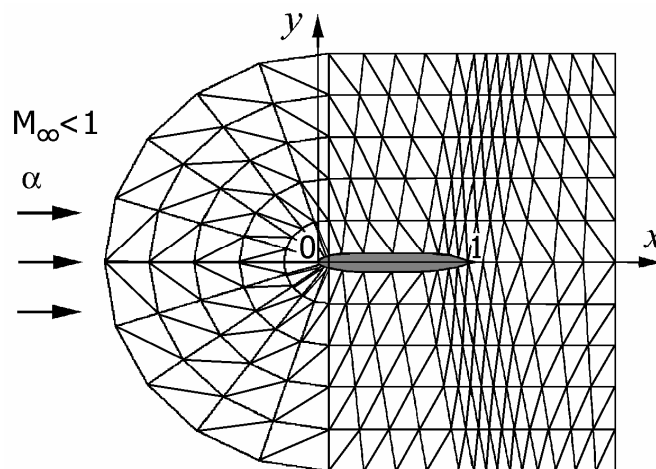


Фиг. 1а. Верхняя сторона аэродинамических профилей: 1 – (1.1) с  $m=16$ , 2 – (1.1) с  $m=12$ , 3 – (1.1) с  $m=10$ , 4 – профиль с прямолинейной средней частью [8]

обтекания при других значениях  $M_\infty$  и  $\alpha$ . Постоянная адиабаты принята равной 1.4. Для численного решения поставленной задачи использовалась программа NSC2KE, основанная на методе конечных объемов второго порядка точности [4, 10]. Интегрирование по времени проводилось с помощью явного четырехточечного алгоритма Рунге-Кутты. Стационарные решения находились методом установления с применением локальных шагов по времени.

Вычислительная неоднородная C-образная сетка состояла из треугольных элементов, сгущавшихся около профиля, в области ударных волн и в следе (фиг. 1б). Внешняя граница расчетной области располагалась на расстоянии 15-18 длин хорд от профиля. Каждая сторона профиля была представлена 265 сеточными узлами, в следе находилось 102 узла, на внешней границе 733 узла, а в “радиальных” направлениях (близких направлению нормали к профилю и следу) задавалось 215 шагов сетки.

Точность данного метода тестировалась на ряде задач, в частности, на задаче о трансзвуковом течении в канале с выступом на нижней стенке [1 - 3] и задаче обтекания профиля NACA 0012 при  $\alpha=1.25^\circ$ . Сравнение полученных значений коэффициента подъемной силы и изолиний числа Маха с результатами, полученными для этого профиля в [11], показало высокую точность использованного метода.

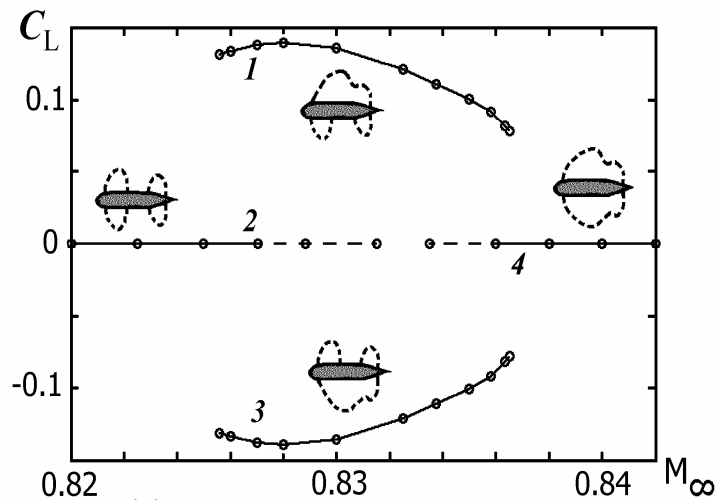


Фиг. 1б. Схема вычислительной сетки

## 2. Расчеты невязкого стационарного обтекания профиля (1.1) при нулевом угле атаки.

На фиг. 2 показана зависимость коэффициента подъемной силы от числа Маха натекающего потока при  $\alpha=0$ . Левая ветвь графика получена в результате расчета обтекания профиля при  $M_\infty=0.82$  и последующего постепенного увеличения числа Маха до 0.8315. На каждом шаге в качестве начальных данных использовалось поле течения, полученное для предыдущего  $M_\infty$ . При этом картина обтекания симметрична относительно оси  $x$  и содержит две пары местных сверхзвуковых зон, прилегающих к верхней и нижней сторонам профиля.

Если симметричное течение, полученное, например, при  $M_\infty=0.828$ , использовать в качестве начального состояния и задать угол атаки  $\alpha=0.05^\circ$ , то развивается нестационарный переход, при котором происходит слияние местных сверхзвуковых зон на верхней стороне профиля. В результате релаксации формируется асимметричное течение с одной сверхзвуковой зоной на



Фиг. 2. Зависимость коэффициента подъемной силы  $C_L$  от  $M_\infty$  для профиля (1.1) при  $\alpha=0$ ; 1-4 – ветви, соответствующие разному количеству местных сверхзвуковых зон, как показано на схемах обтекания

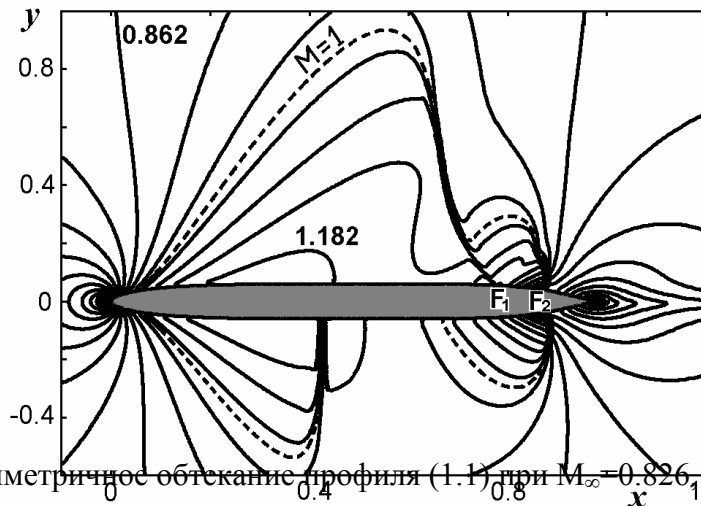
верхней стороне профиля и двумя – на нижней. При возврате к нулевому углу атаки такая качественная структура течения сохраняется. Более того, качественная картина обтекания сохраняется при последующем изменении  $M_\infty$  в интервале

$$M_{\min} < M_\infty < M_{\max} \quad (2.1)$$

с  $M_{\min} \approx 0.8256$  и  $M_{\max} \approx 0.8365$ . В частности, при  $M_\infty=0.826$  и  $\alpha=0$  устойчивое несимметричное обтекание показано на фиг. 3.

Аналогичным образом задание отрицательного угла атаки  $\alpha=-0.05^\circ$  при  $M_\infty=0.828$  вызывает переход с ветви 2 на ветвь 3 графика, представленного на фиг. 2. Анализ влияния измельчения сетки на границы интервала (2.1) показывает, что погрешность найденных значений  $M_{\min}$  и  $M_{\max}$  составляет  $\pm 0.0003$ . Ширина диапазона (2.1) соответствует изменению скорости натекающего потока примерно в 3.3 м/сек, если для скорости звука принято значение 250 м/сек.

Правая ветвь графика на фиг. 2 соответствует симметричному обтеканию с одной сверхзвуковой зоной у каждой стороны профиля. Такая картина обтекания может быть получена при любых начальных условиях путем задания  $M_\infty > M_{\max}$  и последующего изменения  $M_\infty$  в интервале  $0.8335 < M_\infty < 0.850$ . Между правой и левой ветвями находится сингулярное число Маха  $M_s \approx 0.8325$ , вблизи которого симметричное обтекание неустойчиво по отношению к



Фиг. 3. Несимметричное обтекание профиля (1.1) при  $M_\infty=0.826$ ,  $\alpha=0$ : изолинии числа Маха

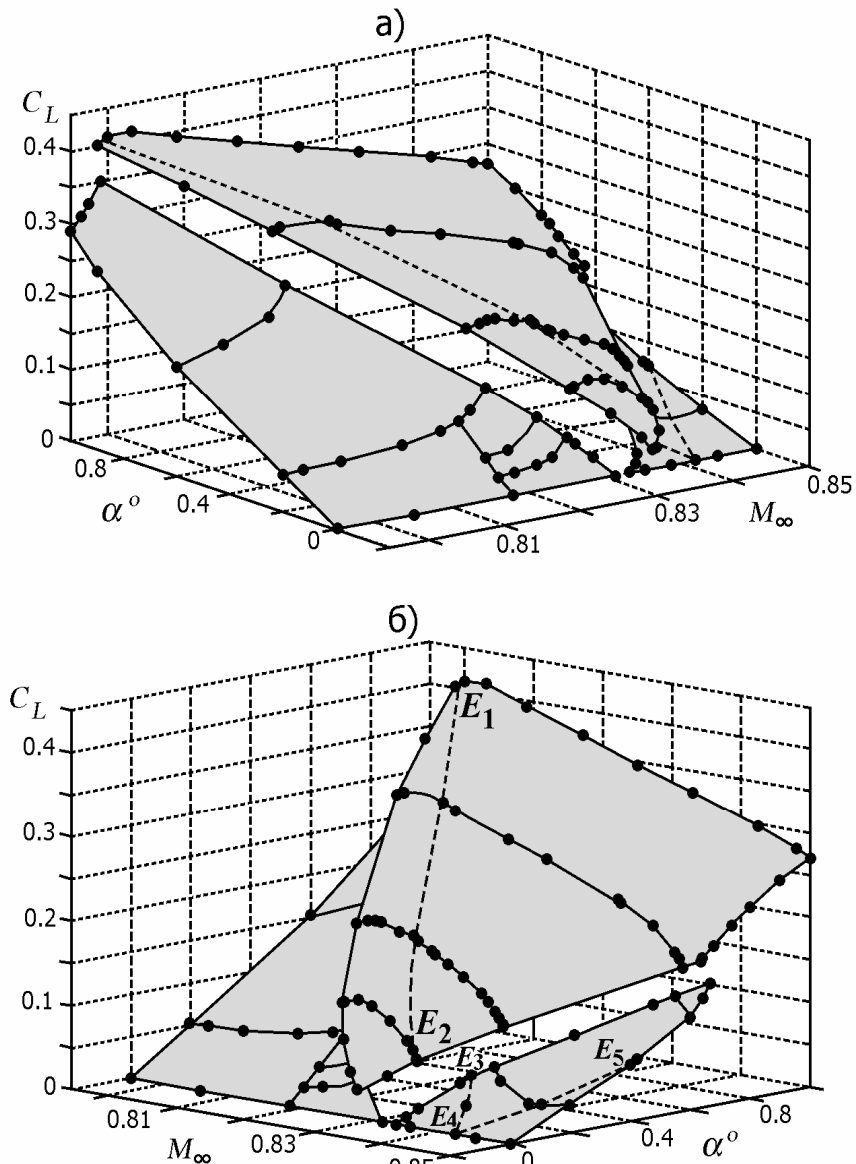
крайне малым возмущениям угла атаки, геометрии профиля и вычислительной сетки. Природа этой неустойчивости обусловлена невозможностью стационарного течения с двумя местными сверхзвуковыми зонами, имеющими одну общую точку на профиле [1- 3].

### 3. Расчеты невязкого стационарного обтекания профиля (1.1) при $-1^\circ < \alpha < 1^\circ$ .

Проведенная серия расчетов выявила зависимость коэффициента подъемной силы  $C_L$  от  $\alpha$  и  $M_\infty$ , которая может быть изображена в виде кусочно-непрерывной поверхности в пространстве  $(C_L, \alpha, M_\infty)$ . Фрагмент этой поверхности, расположенный в полупространстве  $C_L > 0$ , показан на фиг. 4 с двух разных точек наблюдения. Верхняя часть поверхности частично выходит в область отрицательных  $\alpha$ , что соответствует ситуации с положительной подъемной силой при отрицательном угле атаки. Вдоль кривой  $E_1E_2$  на верхней части поверхности и вдоль кривой  $E_3E_4$  на ее правой части наблюдается слабый излом. Этот излом соответствует картине обтекания, в которой наклонная ударная волна пересекается с профилем в той же точке, что и ударная волна, замыкающая местную сверхзвуковую зону (т. е. точки  $F_1$  и  $F_2$  на фиг. 3 совпадают). Слабый излом вдоль кривой  $E_4E_5$  соответствует такой же конфигурации ударных волн на нижней стороне профиля.

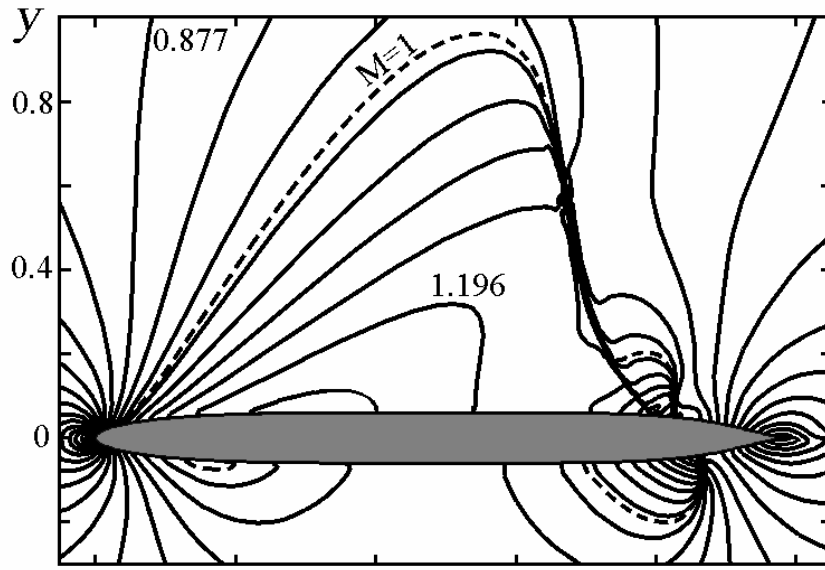
С увеличением угла атаки  $\alpha$  разрыв между верхней и боковыми частями поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$  изменяется незначительно. При  $\alpha \geq 0.8^\circ$  скачкообразный переход между верхней и левой ее частями вызван иным видом неустойчивости, который не связан с расщеплением местной сверхзвуковой зоны на верхней стороне профиля при уменьшении  $M_\infty$ .

В частности, при фиксированном  $\alpha=0.8^\circ$  и постепенном уменьшении  $M_\infty$  от 0.81 до 0.8029 происходит уменьшение размеров сверхзвуковой зоны на верхней стороне профиля и формирование дозвукового максимума скорости вблизи точки  $x \approx 0.85$  (фиг. 5). При дальнейшем уменьшении  $M_\infty$  до 0.8026 развивается нестационарный переход, в результате которого система ударных волн в конце сверхзвуковой зоны сливается в одну ударную волну, сдвигающуюся в процессе релаксации еще дальше вверх по течению до координаты  $x=0.60$ . Это сопровождается формированием при  $x \approx 0.85$  второй местной сверхзвуковой зоны, которая постепенно увеличивается в размерах и занимает участок профиля  $0.80 < x < 0.87$ .



Фиг. 4. Фрагмент поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$ , расположенный в верхнем полупространстве  $C_L > 0$  ;  
а, б – два вида, соответствующие разным положениям точки наблюдения

При  $\alpha=1^\circ$  и постепенном уменьшении  $M_\infty$  от 0.81 до 0.7985 происходит формирование небольшой второй сверхзвуковой зоны вблизи точки  $x \approx 0.85$  на верхней стороне профиля. При дальнейшем уменьшении  $M_\infty$  до 0.7982 развивается нестационарный переход, подобный вышеописанному, при котором первая сверхзвуковая зона смещается вверх по течению, а вторая резко возрастает в размерах. Если же, напротив, увеличить  $M_\infty$  с 0.7982 до 0.7985, то качественная структура течения сохраняется из-за наличия гистерезиса по  $M_\infty$  и  $\alpha$ . Однако



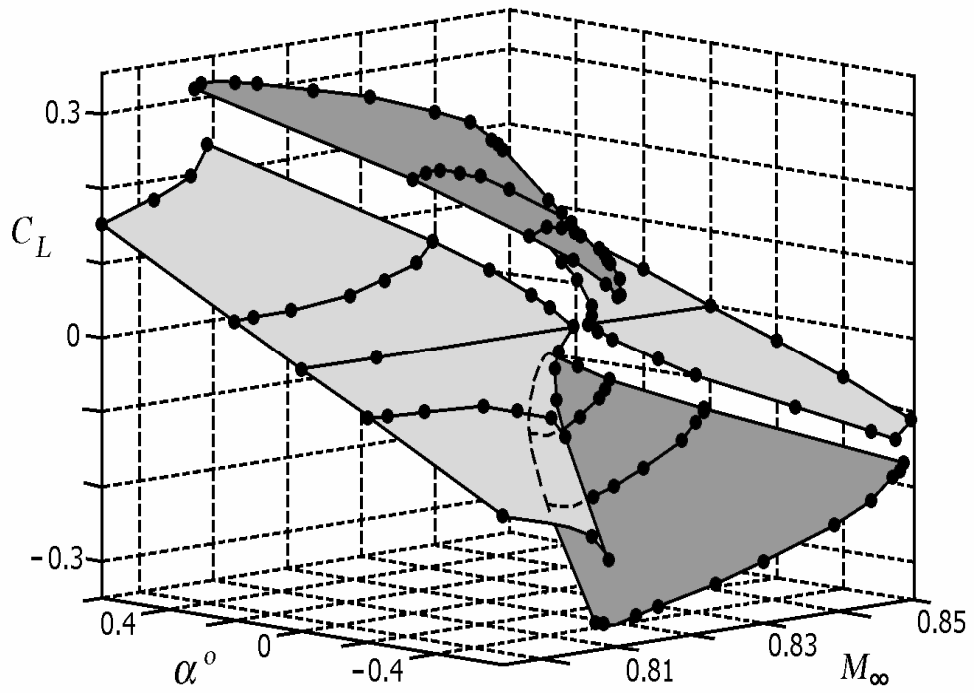
Фиг. 5. Обтекание профиля (1.1) при  $M_\infty=0.8029$ ,  $\alpha=0.8^\circ$ : изолинии числа Маха

при увеличении  $M_\infty$  до 0.7988 развивается нестационарный переход, в результате которого первая сверхзвуковая зона на верхней стороне профиля резко смещается вниз по течению, а вторая зона существенно уменьшается в размерах. При дальнейшем увеличении  $M_\infty$  вторая сверхзвуковая зона сжимается в точку и исчезает.

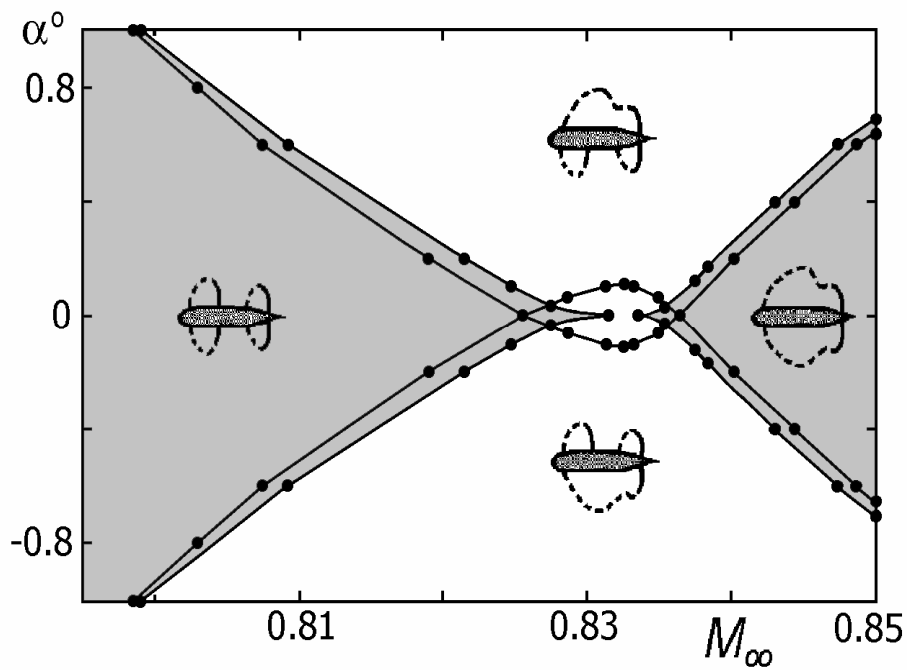
На фиг. 6 показан фрагмент поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$  в полной окрестности нулевого угла атаки (как при  $C_L > 0$ , так и при  $C_L < 0$ ). Нижняя часть этой поверхности построена по соотношению  $C_L(-\alpha, M_\infty) = -C_L(\alpha, M_\infty)$ , справедливому в силу симметрии профиля (1.1).

На фиг. 7 представлены бифуркационные кривые, полученные проецированием краев поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$  на плоскость  $(\alpha, M_\infty)$ . Серым цветом выделены проекции левого и правого крыла этой поверхности, которые показывают границы устойчивости симметричного обтекания при возмущениях угла атаки. Как видно, симметричное обтекание неустойчиво при  $|\alpha| > 0.05$  в диапазоне  $0.827 \leq M_\infty \leq 0.836$  (который на фиг. 2 выделен штриховыми линиями), то есть в интервале числа Маха длиной 0.009.

Сравнение с результатами, полученными в [4, 5], показывает, что в данном случае длина интервала неединственности (2.1), так же как и максимальное значение  $C_L$ , больше, чем для профилей семейства (1.1) с  $m=10$  и  $m=12$ . Это объясняется уменьшением кривизны профиля вблизи его середины при увеличении  $m$ , что обуславливает больший эффект структурной неустойчивости. В то же время длина интервала неединственности (2.1), так же как и максимальное значение  $C_L$ , здесь меньше, чем для профиля с прямолинейной средней частью [8].

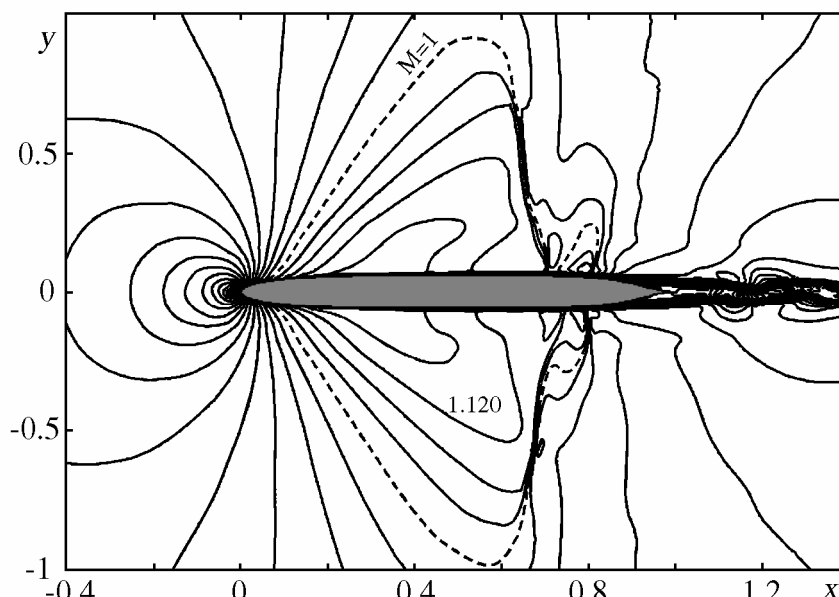


Фиг. 6. Фрагмент поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$ , расположенный в верхнем и нижнем полупространстве



Фиг. 7. Бифуркационные кривые, полученные проецированием краев поверхности, представленной на фиг. 6, на плоскость  $(\alpha, M_\infty)$ .

Пересечение поверхности  $C_L(\alpha, M_\infty)$  плоскостью  $M_\infty = \text{const}$  дает график зависимости  $C_L$  от  $\alpha$ , который, как видно из фиг. 6 и 7, имеет три ветви, кроме малой окрестности сингулярного значения  $M_s = 0.8325$ , где средняя ветвь (соответствующая серой области на фиг. 7) исчезает. Для чисел Маха из диапазона (2.1) верхняя и нижняя ветви графика  $C_L(\alpha)$  имеют пересекающиеся интервалы определения на оси  $\alpha$ , что означает наличие гистерезиса по углу атаки. Ширина этого гистерезиса может быть больше или меньше ширины средней ветви в зависимости от  $M_\infty$ . Поэтому при изменении  $\alpha$  могут осуществляться переходы  $C_L$  непосредственно с верхней ветви на нижнюю и наоборот, или же в качестве промежуточного шага может участвовать средняя ветвь графика. Вне диапазона (2.1), как видно из фиг. 7, зависимость  $C_L$  от  $\alpha$  при фиксированном  $M_\infty$  имеет гистерезис в двух непересекающихся интервалах оси  $\alpha$ . В целом поведение  $C_L(\alpha)$  аналогично установленному в [6] для профиля с  $m=12$ .



Фиг. 8. Нестационарное обтекание профиля (1.1) вязким потоком при  $M_\infty = 0.842$ ,  $\alpha = 0$ : изолинии числа Маха.

**4. Обтекание профиля (1.1) с учетом вязкости потока.** Учет турбулентного пограничного слоя на профиле приводит к смещению чисел Маха, при которых возникают неустойчивости и бифуркации, в сторону больших значений. При этом наблюдаются автоколебания следа, сформировавшегося в результате отрыва пограничных слоев от верхней и нижней сторон профиля вследствие резкого уменьшения его толщины при  $x \approx 0.9$ . Кроме того, происходит, как правило, возбуждение низкочастотных колебаний ударных волн на профиле.

В качестве примера на фиг. 8 представлена картина обтекания профиля (1.1) в некоторый момент времени после развития колебаний при исходных данных  $\alpha = 0$ ,  $M_\infty = 0.842$  и  $Re = 10^6$ . Начальные условия соответствовали точке  $M_\infty = 0.836$  ветви 4 графика, представленного на фиг. 2. В расчетах был получен нестационарный режим, в котором колебания следа имеют наибольшую амплитуду в интервале  $1.1 < x < 1.3$ . Возмущения, исходящие от следа, при этом распространяются вверх по течению, достигают ударных волн, расположенных на профиле, и сложным образом взаимодействуют с ними. Частота колебаний следа в несколько десятков раз превышает частоту колебаний ударных волн. Последние осуществляются в противофазе на верхней и нижней сторонах профиля и сопровождаются поочередным формированием



вторичных сверхзвуковых зон около координаты  $x \approx 0.80$  на обеих сторонах профиля. Эти сверхзвуковые зоны с течением времени увеличиваются в размерах, смещаются вверх по течению и сливаются с первичными сверхзвуковыми зонами.

**5. Заключение.** Показано, что при невязком обтекании профиля (1.1) коэффициент подъемной силы может изменяться скачком при непрерывном изменении угла атаки или числа Маха натекающего потока. Установлены линии разрывов и ветвления решений на плоскости  $(M_\infty, \alpha)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuz'min A.G. Interaction of a shock wave with the sonic line // IUTAM Symp. Transsonicum IV. Dordrecht: Kluwer, 2003. pp. 13–18.
2. Кузьмин А.Г., Иванова А.В. Неустойчивые режимы невязкого трансзвукового течения в канале // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 10, с. 35–40.
3. Kuz'min A.G., Ivanova A.V. The structural instability of transonic flow associated with amalgamation/splitting of supersonic regions // J. of Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Springer. 2004. V. 18. № 5, с. 335-344.
4. Иванова А.В., Кузьмин А.Г. Неединственность трансзвукового обтекания аэродинамического профиля // Известия АН. Сер. "Механика жидкости и газа". 2004. № 4, с. 152–159.
5. Семенов Д.С. Неустойчивые режимы трансзвукового обтекания аэродинамического профиля // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 11, с. 101–106.
6. Kuz'min A.G. Instability of transonic flow over airfoils at singular freestream Mach numbers // Proc. ECCOMAS 2004. Eds.: P. Neittaanmaki, T. Rossi, K. Majava, and O. Pironneau. 8 p. 2004.
7. Кузьмин А.Г., Иванова А.В. Структурная неустойчивость трансзвукового течения около аэродинамического профиля // Инженерно-физич. журн. 2004. Т. 77. № 5, с. 144–148.
8. Hafez M.M., Guo W.H. Nonuniqueness of transonic flows // Acta mech. 1999. V. 138. № 3-4, pp. 177–184.
9. Peyret R., Taylor T.D. Computational methods for fluid flow. Springer. 1990. 358 p.
10. Mohammadi B. Fluid dynamics computation with NSC2KE: an user-guide, release 1.0. INRIA Techn. Report. 1994. RT-0164. 71 p.
11. Delanae M., Geuzaine Ph., Essers J.A. Development and application of quadratic reconstruction schemes for compressible flows on unstructured adaptive grids // AIAA Paper. 1997. № 97-2120, pp 250 - 260.

С-Петербург - Москва  
Сентябрь 2005 г.